แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

หน่วยการเรียนรู้ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ **เรื่อง สมบัติผลคูณเชิงเวกเตอร์** **เวลา 1 ชั่วโมง**

ผลการเรียนรู้

1. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์

2. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระสำคัญ

บทนิยาม 11 ให้ $\vec{\square} = \square_1\vec{\square} + \square_2\vec{\square} + \square_3\vec{\square}$ และ $\vec{\square} = \square_1\vec{\square} + \square_2\vec{\square} + \square_3\vec{\square}$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) ของ $\vec{\square}$ และ $\vec{\square}$ เขียนแทนด้วย $\vec{\square} \times \vec{\square}$

กำหนดโดย $\vec{\square} \times \vec{\square} = (\square_2\square_3 - \square_3\square_2)\vec{\square} - (\square_1\square_3 - \square_3\square_1)\vec{\square} + (\square_1\square_2 - \square_2\square_1)\vec{\square}$

กำหนด $\vec{\square}, \vec{\square}$ และ $\vec{\square}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ และ $\square$ เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. $\vec{\square} \times \vec{\square} = -(\vec{\square} \times \vec{\square})$
2. $(\vec{\square} + \vec{\square}) \times \vec{\square} = (\vec{\square} \times \vec{\square}) + (\vec{\square} \times \vec{\square})$
3. $\vec{\square} \times (\vec{\square} + \vec{\square}) = (\vec{\square} \times \vec{\square}) + (\vec{\square} \times \vec{\square})$
4. $\vec{\square} \times (\square\vec{\square}) = \square(\vec{\square} \times \vec{\square})$
5. $(\square\vec{\square}) \times \vec{\square} = \square(\vec{\square} \times \vec{\square})$
6. $\vec{\square} \times \vec{\square} = \vec{0}$

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถอธิบายสมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้

สาระการเรียนรู้

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

กำหนด $\vec{\square}, \vec{\square}$ และ $\vec{\square}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ และ $\square$ เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. $\vec{\square} \times \vec{\square} = -(\vec{\square} \times \vec{\square})$
2. $(\vec{\square} + \vec{\square}) \times \vec{\square} = (\vec{\square} \times \vec{\square}) + (\vec{\square} \times \vec{\square})$
3. $\vec{\square} \times (\vec{\square} + \vec{\square}) = (\vec{\square} \times \vec{\square}) + (\vec{\square} \times \vec{\square})$
4. $\vec{\square} \times (\square\vec{\square}) = \square(\vec{\square} \times \vec{\square})$
5. $(\square\vec{\square}) \times \vec{\square} = \square(\vec{\square} \times \vec{\square})$
6. $\vec{\square} \times \vec{\square} = \vec{0}$

กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูทบทวนความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์ โดยตั้งคำถามนักเรียน ดังนี้
   - ผลคูณเชิงเวกเตอร์มีบทนิยามว่าอย่างไรและมีวิธีหาอย่างไร
   - ให้นักเรียนยกตัวอย่างการหาผลคูณเชิงเวกเตอร์
   - นักเรียนและครูสรุปบทนิยามผลคูณเชิงเวกเตอร์ ดังนี้

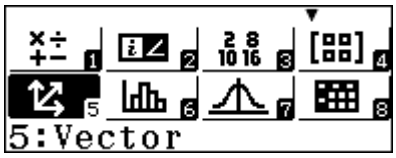
ให้ $\vec{\square} = \square_1\vec{\square} + \square_2\vec{\square} + \square_3\vec{\square}$ และ $\vec{\square} = \square_1\vec{\square} + \square_2\vec{\square} + \square_3\vec{\square}$

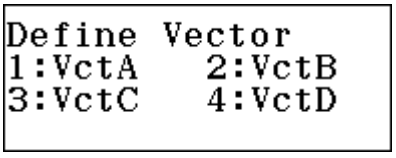
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) ของ $\vec{\square}$ และ $\vec{\square}$ เขียนแทนด้วย $\vec{\square} \times \vec{\square}$

กำหนดโดย $\vec{\square} \times \vec{\square} = (\square_2\square_3 - \square_3\square_2)\vec{\square} - (\square_1\square_3 - \square_3\square_1)\vec{\square} + (\square_1\square_2 - \square_2\square_1)\vec{\square}$

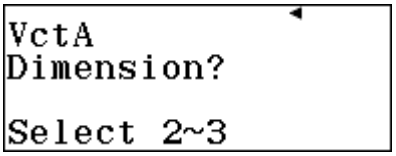
2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องสมบัติผลคูณเชิงเวกเตอร์
3. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม จำนวน 5 กลุ่ม นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX classwiz เพื่อหาค่า $\vec{\square} \times \vec{\square}$ เมื่อกำหนด $\vec{\square} = \square\vec{\square} + \square\vec{\square} - \square\vec{\square}$ และ $\vec{\square} = \square\vec{\square} - \vec{\square} + \square\vec{\square}$ โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

3.1 กดปุ่มw**5**

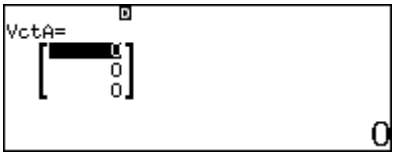




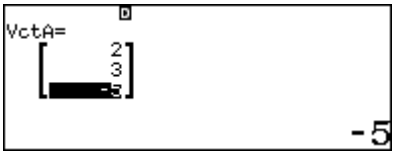
3.2 กำหนดค่า $\vec{\square}$ โดยกดปุ่ม 1



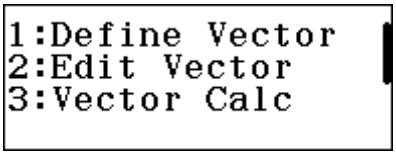
3.3 เลือกมิติเวกเตอร์แบบ 3 มิติ โดยกดปุ่ม 3



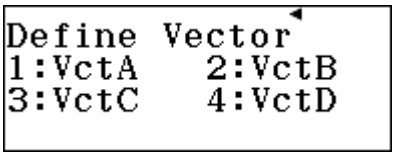
3.4 ป้อนค่า $\vec{\square} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 5\bar{k}$ โดยกดปุ่ม 2=3=z5=



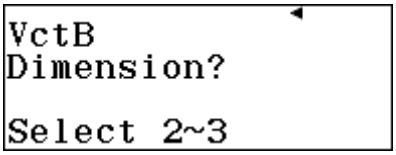
3.5 กดปุ่ม T



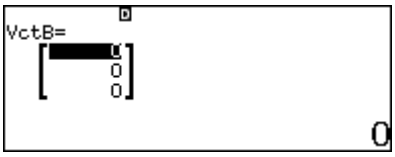
3.6 กำหนด $\vec{\square}$ โดยกดปุ่ม 1



3.7 กำหนดมิติของ $\vec{\square}$ โดยกดปุ่ม 2

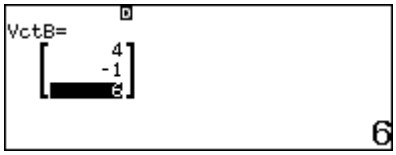


3.8 เลือกมิติเวกเตอร์แบบ 3 มิติ โดยกดปุ่ม 3



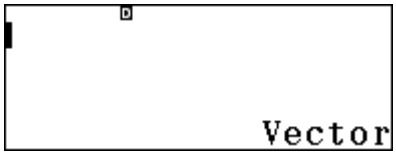
3.9 ป้อนค่า $\vec{\square}$ = $4\bar{i} - \bar{j} + 6\bar{k}$ โดยกดปุ่ม

4=z1=6=

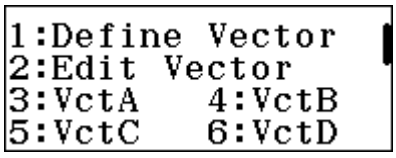


3.10 เตรียมคำนวณผลคูณเวกเตอร์

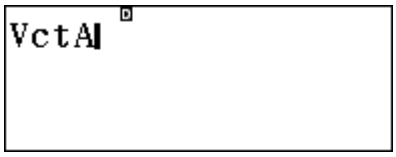
โดยกดปุ่ม C



3.11 นำ $\vec{\square}$ ที่กำหนดไว้ออกมา โดยกดปุ่ม T

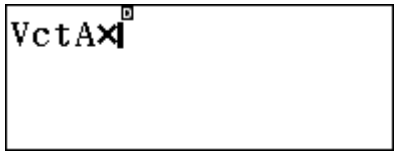


3.12 นำ $\vec{\square}$ ที่กำหนดไว้ออกมา โดยกดปุ่ม 3

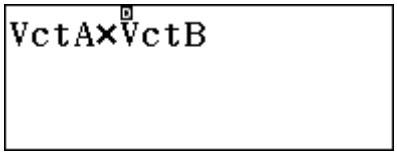


3.13 ป้อนเครื่องหมายคูณแบบเวกเตอร์(Cross)

โดยกดปุ่มคูณ O

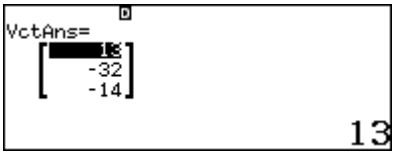


3.14 นำ $\vec{\square}$ ที่กำหนดไว้ออกมา โดยกดปุ่ม T4



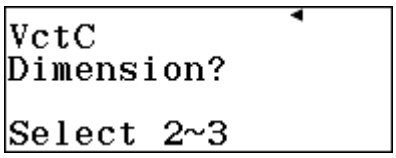
3.15 คำนวณผลคูณของ $\vec{\square} \times \vec{\square}$ โดยกดปุ่ม =

จะได้ผลคูณเชิงเวกเตอร์ คือ $\square\square\vec{\square} - \square\square\vec{\square} - \square\square\vec{\square}$



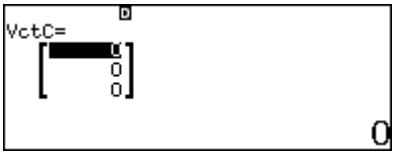
4. นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX classwiz เพื่อหาค่า $\vec{\square} \times (\vec{\square} + \vec{\square})$ เมื่อกำหนด $\vec{\square}$ = $\square\vec{\square} + \square\vec{\square} - \square\vec{\square}$, $\vec{\square}$ = $\square\vec{\square} - \vec{\square} + \square\vec{\square}$ และ $\vec{\square}$=$\square\vec{\square} + \square\vec{\square} + \square\vec{\square}$ โดยครู

แนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

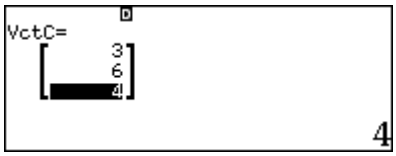


4.1 กำหนดค่า $\vec{\square}$ เพิ่ม

โดยกดปุ่ม T13

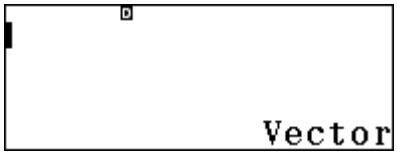


4.2 เลือกมิติเวกเตอร์แบบ 3 มิติ โดยกดปุ่ม **3**

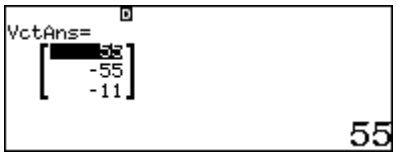


4.3 ป้อนค่า $\vec{\square}=\square\vec{\square}+\square\vec{\square}+\square\vec{\square}$ โดยกดปุ่ม

3=6=4=



4.4 เตรียมคำนวณผลคูณเชิงเวกเตอร์ โดยกดปุ่ม C



4.5 คำนวณค่า $\vec{\square}\times(\vec{\square}+\vec{\square})$ ที่กำหนดไว้

โดยกดปุ่ม T3O(T4

+T5)=

จะได้ผลคูณเชิงเวกเตอร์ คือ $\square\square\vec{\square}-\square\square\vec{\square}-\square\square\vec{\square}$

5. ครูแจกใบกิจกรรมที่ 2.1 – 2.5 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบกิจกรรม และร่วมกันอภิปราย (ขั้นสำรวจและขั้นหาความสัมพันธ์)

6. นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอและอภิปรายผลเพื่อนำไปสู่การ ตรวจสอบสมบัติของการคูณเชิงเวกเตอร์ดังนี้

ใบกิจกรรมที่ 2.1 จะได้ว่า $\vec{\square}\times\vec{\square}=-(\vec{\square}\times\vec{\square})$

ใบกิจกรรมที่ 2.2 จะได้ว่า $(\vec{\square}+\vec{\square})\times\vec{\square}=(\vec{\square}\times\vec{\square})+(\vec{\square}\times\vec{\square})$

ใบกิจกรรมที่ 2.3 จะได้ว่า $\vec{\square}\times(\vec{\square}+\vec{\square})=(\vec{\square}\times\vec{\square})+(\vec{\square}\times\vec{\square})$

ใบกิจกรรมที่ 2.4 จะได้ว่า $\vec{\square}\times(\square\vec{\square})=\square(\vec{\square}\times\vec{\square})$ และ $(\square\vec{\square})\times\vec{\square}=\square(\vec{\square}\times\vec{\square})$

ใบกิจกรรมที่ 2.5 จะได้ว่า $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$

7. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อสรุปสมบัติผลคูณเชิงเวกเตอร์ที่ได้จากการสำรวจ (ขั้นสรุปความสัมพันธ์) จะได้ว่า

กำหนด $\vec{\square},\vec{\square}$ และ $\vec{\square}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ และ $\square$ เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. $\vec{\square}\times\vec{\square}=-(\vec{\square}\times\vec{\square})$
2. $(\vec{\square}+\vec{\square})\times\vec{\square}=(\vec{\square}\times\vec{\square})+(\vec{\square}\times\vec{\square})$
3. $\vec{\square}\times(\vec{\square}+\vec{\square})=(\vec{\square}\times\vec{\square})+(\vec{\square}\times\vec{\square})$
4. $\vec{\square}\times(\square\vec{\square})=\square(\vec{\square}\times\vec{\square})$
5. $(\square\vec{\square})\times\vec{\square}=\square(\vec{\square}\times\vec{\square})$
6. $\vec{\square}\times\vec{\square}=\vec{0}$

8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 2 เรื่อง สมบัติผลคูณเชิงเวกเตอร์ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX classwiz

สื่อการเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz
2. ใบกิจกรรมที่ 2.1 – 2.5 เรื่อง สมบัติผลคูณเชิงเวกเตอร์
3. แบบฝึกทักษะที่ 2 เรื่อง สมบัติผลคูณเชิงเวกเตอร์

การวัดและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 2.1 – 2.5
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 2
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรมที่ 2.1

เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX classwiz คำนวณผลลัพธ์ต่อไปนี้

<u>ตอนที่ 1</u> กำหนด $\vec{\square} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{\square} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$\vec{\square} \times \vec{\square} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$	$-(\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$
2	$\vec{\square} \times \vec{\square} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$	$-(\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$
3	$\vec{\square} \times \vec{\square} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$	$-(\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$
4	$\vec{\square} \times \vec{\square} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$	$-(\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$

<u>ตอนที่ 2</u> กำหนด $\vec{\square} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{\square} = \begin{bmatrix} 2.3 \\ 1.5 \\ -1.1 \end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$\vec{\square} \times \vec{\square} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$	$-(\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$
2	$\vec{\square} \times \vec{\square} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$	$-(\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$
3	$\vec{\square} \times \vec{\square} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$	$-(\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$
4	$\vec{\square} \times \vec{\square} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$	$-(\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$

จากกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า ถ้า $\square, \square, \square, \square, \square, \square$ เป็นสเกลาร์ และ $\vec{\square}, \vec{\square}, \vec{\square}$ และ $\vec{\square}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$\begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น $\vec{\square} \times \vec{\square}$ = ...

ใบกิจกรรมที่ 2.2

เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX classwiz คำนวณผลลัพธ์ต่อไปนี้

<u>ตอนที่ 1</u> กำหนด $\vec{\square} = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}0.5\\0.7\\0.2\end{bmatrix}$ และ $\vec{\square} = \begin{bmatrix}2.3\\1.5\\-1.1\end{bmatrix}$ (เหมือนตอนที่ 2 ใบกิจกรรมที่ 2.1)

<u>หมายเหตุ</u> หากนักเรียนเคยสร้างไว้ในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์แล้ว ไม่จำเป็นต้องสร้างใหม่

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$(\vec{\square}+\vec{\square})\times\vec{\square} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square}\times\vec{\square})+(\vec{\square}\times\vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
2	$(\vec{\square}+\vec{\square})\times\vec{\square} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square}\times\vec{\square})+(\vec{\square}\times\vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
3	$(\vec{\square}+\vec{\square})\times\vec{\square} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square}\times\vec{\square})+(\vec{\square}\times\vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
4	$(\vec{\square}+\vec{\square})\times\vec{\square} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square}\times\vec{\square})+(\vec{\square}\times\vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$

<u>ตอนที่ 2</u> กำหนด $\vec{\square} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}-7\\3\end{bmatrix}$ และ $\vec{\square} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$(\vec{\square}+\vec{\square})\times\vec{\square} = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square}\times\vec{\square})+(\vec{\square}\times\vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$
2	$(\vec{\square}+\vec{\square})\times\vec{\square} = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square}\times\vec{\square})+(\vec{\square}\times\vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$
3	$\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$
4	$\left(\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-7\\3\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$\left(\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}-7\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$

จากกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า ถ้า $\square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square$ เป็นสเกลาร์ และ $\vec{\square}, \vec{\square}, \vec{\square}$ และ $\vec{\square}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$\left(\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น $(\vec{\square}+\vec{\square})\times\vec{\square}$ = ...

$(\vec{\square} + \vec{\square}) \times \vec{\square}$ = ...

ใบกิจกรรมที่ 2.3

เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX classwiz คำนวณผลลัพธ์ต่อไปนี้

<u>ตอนที่ 1</u> กำหนด กำหนด $\vec{\square} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}-7\\3\end{bmatrix}$ และ $\vec{\square} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ (เหมือนตอนที่ 2 ใบกิจกรรมที่ 2.2)

<u>หมายเหตุ</u> หากนักเรียนเคยสร้างไว้ในเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ ไม่จำเป็นต้องสร้างใหม่

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$\vec{\square} \times (\vec{\square} + \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square} \times \vec{\square}) + (\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$
2	$\vec{\square} \times (\vec{\square} + \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square} \times \vec{\square}) + (\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}-7\\3\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$\left(\begin{bmatrix}-7\\3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix}-7\\3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-7\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-7\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$

<u>ตอนที่ 2</u> กำหนด $\vec{\square} = \begin{bmatrix}4\\-4\\2\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}4\\3\\3\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\3\end{bmatrix}$ และ $\vec{\square} = \begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$\vec{\square} \times (\vec{\square} + \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square} \times \vec{\square}) + (\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
2	$\vec{\square} \times (\vec{\square} + \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square} \times \vec{\square}) + (\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
3	$\vec{\square} \times (\vec{\square} + \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square} \times \vec{\square}) + (\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
4	$\vec{\square} \times (\vec{\square} + \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$(\vec{\square} \times \vec{\square}) + (\vec{\square} \times \vec{\square}) = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$

จากกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า ถ้า $\square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square$ เป็นสเกลาร์ และ $\vec{\square}, \vec{\square}, \vec{\square}$ และ $\vec{\square}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น $\vec{\square} \times (\vec{\square} + \vec{\square})$ = ..., $(\vec{\square} + \vec{\square}) \times \vec{\square}$ = ...

ใบกิจกรรมที่ 2.4

เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX classwiz คำนวณผลลัพธ์ต่อไปนี้

กำหนด $\vec{\square} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\3\end{bmatrix}$ และ $\vec{\square} = \begin{bmatrix}5\\2\\-1\end{bmatrix}$

ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2	กรณีที่ 3
1	$\vec{\square} \times (4\vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$(4\vec{\square}) \times \vec{\square}$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$4(\vec{\square} \times \vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$
2	$\vec{\square} \times ((-5)\vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$((-5)\vec{\square}) \times \vec{\square}$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$(-5)(\vec{\square} \times \vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$
3	$\vec{\square} \times \left(\frac{3}{4}(\vec{\square})\right)$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$\left(\frac{3}{4}(\vec{\square})\right) \times \vec{\square}$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$\frac{3}{4}(\vec{\square} \times \vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$
4	$\vec{\square} \times (0.4\vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$(0.4\vec{\square}) \times \vec{\square}$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$	$0.4(\vec{\square} \times \vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$
5	$\vec{\square} \times (3\vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$(3\vec{\square}) \times \vec{\square}$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$3(\vec{\square} \times \vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
6	$\vec{\square} \times ((-2)\vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$((-2)\vec{\square}) \times \vec{\square}$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$(-2)(\vec{\square} \times \vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
7	$\vec{\square} \times \left(\frac{1}{2}(\vec{\square})\right)$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$\left(\frac{1}{2}(\vec{\square})\right) \times \vec{\square}$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}(\vec{\square} \times \vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
8	$\vec{\square} \times (0.9\vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$(0.9\vec{\square}) \times \vec{\square}$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	$0.9(\vec{\square} \times \vec{\square})$ = $\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 3 พบว่า ถ้า □, □, □, □, □, □, □ เป็นสเกลาร์ และ $\vec{\square}, \vec{\square}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix} \times \left(e\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\right)$ = $\square\left(\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\right)$ และ $\left(\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix} \times \square\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right)$ = $\square\left(\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right)$

ดังนั้น $\vec{\square} \times (a\vec{\square})$ = $\square(\square \times \square)$

จากกรณีที่ 2 และกรณีที่ 3 พบว่า ถ้า □, □, □, □, □, □, □ เป็นสเกลาร์ และ $\vec{\square}, \vec{\square}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$\left(\square\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}$ = $\square\left(\begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\square\\\square\end{bmatrix}\right)$ และ $\left(\square\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$ = $\square\left(\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}\right)$

ดังนั้น $(\square\vec{\square}) \times \vec{\square} = \square(\square \times \square)$

ใบกิจกรรมที่ 2.5

เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX classwiz คำนวณผลลัพธ์ต่อไปนี้

กำหนด $\vec{\square} = \begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}0.2\\-0.5\\1.2\end{bmatrix}$, $\vec{\square} = \begin{bmatrix}1.2\\3.4\\2.5\end{bmatrix}$ และ $\vec{\square} = \begin{bmatrix}-3.5\\2.6\\4.8\end{bmatrix}$

ข้อ		ข้อ	
1	$\begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix}0.2\\-0.5\\1.2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0.2\\-0.5\\1.2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}1.2\\3.4\\2.5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1.2\\3.4\\2.5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	4	$\begin{bmatrix}-3.5\\2.6\\4.8\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-3.5\\2.6\\4.8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$

<u>จากข้อ 1 - 4</u>

พบว่า ถ้า a,b,c เป็นสเกลาร์ และ $\vec{\square}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

$$\begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\vec{\square} \times \vec{\square}$ = ...

ข้อ		ข้อ	
5	$\vec{i} \times \vec{i} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	6	$\vec{j} \times \vec{j} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
7	$\vec{k} \times \vec{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	จากข้อ 5 – 7 สรุปได้ว่า $\vec{i} \times \vec{i}$ = ... $\vec{j} \times \vec{j}$ = ... $\vec{k} \times \vec{k}$ = ...	

ข้อ		ข้อ	
8	$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	9	$\vec{j} \times \vec{k} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$
10	$\vec{k} \times \vec{i} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\square\\\square\\\square\end{bmatrix}$	จากข้อ 8 – 10 สรุปได้ว่า $\vec{i} \times \vec{j}$ = ... $\vec{j} \times \vec{k}$ = ...	

		$\vec{k}\times\vec{i}$ = ...

แบบฝึกทักษะที่ 2

เรื่อง สมบัติผลคูณเชิงเวกเตอร์

คำชี้แจง ถ้า $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสองมิติหรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ ให้นักเรียนเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง โดย**ไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์**

1. $\vec{u}\times\vec{v}$ = ...
2. $\vec{v}\times\vec{u}$ = ...
3. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})$ = ...
4. $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}$ = ...
5. $\vec{\square}\times(\square\vec{\square})$ = ...
6. $(\square\vec{\square})\times\vec{\square}$ = ...
7. $\vec{0}\times\vec{u}$ = ...
8. $\vec{u}\times\vec{0}$ = ...
9. $\vec{u}\times\vec{u}$ = ...
10. $\vec{i}\times\vec{i}$ = ...
11. $\vec{j}\times\vec{j}$ = ...
12. $\vec{k}\times\vec{k}$ = ...
13. $\vec{i}\times\vec{j}$ = ...
14. $\vec{j}\times\vec{k}$ = ...
15. $\vec{k}\times\vec{i}$ = ...
16. $\vec{j}\times\vec{i}$ = ...
17. $\vec{k}\times\vec{j}$ = ...

18. $\vec{i} \times \vec{k}$ = ...