

ผลการเรียนรู้

เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา

สาระสำคัญ

บทนิยาม 7

ค่าสัมบูรณ์ (absolute value or modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ คือ จำนวนจริง $\sqrt{a^2 + b^2}$

นั่นคือ $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

- 1) $|z|^2 = z\bar{z}$
- 2) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- 3) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ เมื่อ $z \neq 0$
- 4) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- 5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- 6) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถอธิบายสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้

สาระการเรียนรู้

จำนวนเชิงซ้อนและสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูทบทวนความรู้เรื่องค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง โดยตั้งคำถามนักเรียน ดังนี้
 - ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง มีนิยามว่าอย่างไรและมีวิธีหาอย่างไร
 - ให้นักเรียนยกตัวอย่างค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง
 - นักเรียนและครูสรุปบทนิยาม ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง ซึ่งจะได้ว่า

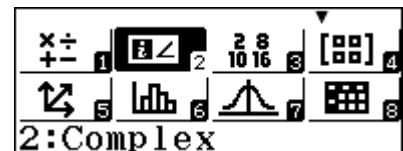
ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a เท่ากับ a เมื่อ a มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a เท่ากับ $-a$ เมื่อ a มีค่าน้อยกว่าศูนย์ หรืออีกนัยหนึ่งค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a คือระยะทางระหว่าง 0 กับจำนวนจริง a นั่นเอง

2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

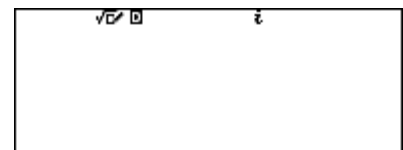
3. ครูทบทวนการเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ หรือ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง คือการเขียนแทนด้วยจุดในระนาบเช่นเดียวกับการแทนคู่อันดับในความสัมพันธ์ใดๆ ด้วยจุดในระนาบในระบบพิกัดฉาก และเรียกแกน X ว่าแกนจริง (real axis) และเรียกแกน Y ว่าแกนจินตภาพ (imaginary axis) และเรียกระนาบนี้ว่าระนาบเชิงซ้อน (complex plane) และยกตัวอย่าง เช่น จำนวนเชิงซ้อน $3 + 4i$ แทนได้ด้วยจุด $(3, 4)$ หรือแทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุด $(0, 0)$ เป็นจุดเริ่มต้น และจุด $(3, 4)$ เป็นจุดสิ้นสุด

4. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มจำนวน 5 กลุ่ม โดยทุกคนเตรียมเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อใช้ในการหาค่าสัมบูรณ์และสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

4.1 กดปุ่ม **MENU**



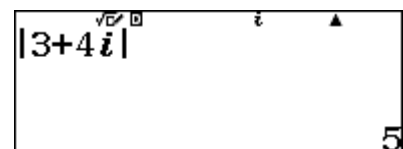
4.2 กดปุ่ม **2**



4.3 หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $3 + 4i$

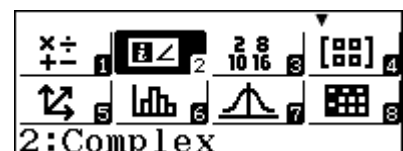
โดยกดปุ่ม **SHIFT** **(C)** **3** **+** **4** **ENG** **=**

(จะได้ค่าสัมบูรณ์ของ $3 + 4i$ คือ 5)

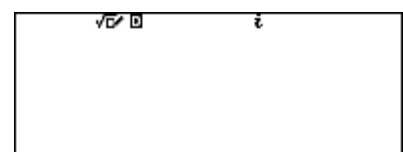


5. นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อใช้หาสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน โดยการใช้การแทนค่าด้วยตัวแปร โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

5.1 กดปุ่ม **MENU**

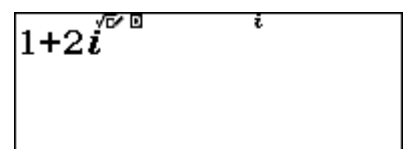


5.2 กดปุ่ม **2**



5.3 ป้อนจำนวนเชิงซ้อน $1 + 2i$ โดยกดปุ่ม

1 **+** **2** **ENG**



5.4 แทนค่าจำนวนเชิงซ้อน $A = 1 + 2i$

โดยกดปุ่ม **STO** **(-)**

5.5 ป้อนจำนวนเชิงซ้อน $3 - 4i$

โดยกดปุ่ม **3** **-** **4** **ENG**

5.6 แทนค่าจำนวนเชิงซ้อน $B = 3 - 4i$

โดยกดปุ่ม **STO** **□□□**

5.7 หาค่าของ $|A|^2$

โดยกดปุ่ม **SHIFT** **()** **ALPHA** **(-)** **▶** **x²** **=**

5.8 หาค่าของ $A\bar{A}$

โดยกดปุ่ม **ALPHA** **(-)** **OPTN** **2** **ALPHA** **(-)** **)** **=**

5.9 หาค่าของ $\left|\frac{1}{A}\right|$

โดยกดปุ่ม **SHIFT** **()** **□□□** **1** **▼** **ALPHA** **(-)** **=**

5.10 หาค่าของ $\frac{1}{|A|}$

โดยกดปุ่ม **□□□** **1** **▼** **SHIFT** **()** **ALPHA** **(-)** **=**

5.11 หาค่าของ $|AB|$

โดยกดปุ่ม **SHIFT** **()** **ALPHA** **(-)** **ALPHA** **□□□** **=**

5.12 หาค่าของ $|A||B|$

โดยกดปุ่ม **SHIFT** **()** **ALPHA** **(-)** **▶**
SHIFT **()** **ALPHA** **□□□** **=**

6. ครูแจกใบกิจกรรมที่ 3.1 และ 3.2 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำและร่วมกันอภิปราย (ขั้นสำรวจ)

7. นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอและอภิปรายผลเพื่อนำไปสู่การตรวจสอบสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
ดังนี้ (ขั้นหาความสัมพันธ์)

ใบกิจกรรมที่ 3.1 ถ้า $z = a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ใบกิจกรรมที่ 3.2 ถ้า z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

- 1) $|z|^2 = z\bar{z}$
- 2) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- 3) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ เมื่อ $z \neq 0$
- 4) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- 5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- 6) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

8. ครูให้นิยามตามบทนิยาม 7 หน้า 28 ในหนังสือเรียน สสวท. รายวิชาเพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ดังนี้

บทนิยาม 7

ค่าสัมบูรณ์ (absolute value or modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ คือจำนวนจริง $\sqrt{a^2 + b^2}$ นั่นคือ $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

9. ครูและนักเรียนช่วยกันพิสูจน์สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนตามหลักการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อยืนยันสมบัติต่างๆ ว่าเป็นจริงทุกกรณี อีกครั้งหนึ่ง

10. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อสรุปสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนที่ได้จากการสำรวจ จะได้ว่า (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)

ถ้า z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

- 1) $|z|^2 = z\bar{z}$
- 2) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- 3) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ เมื่อ $z \neq 0$
- 4) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- 5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- 6) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

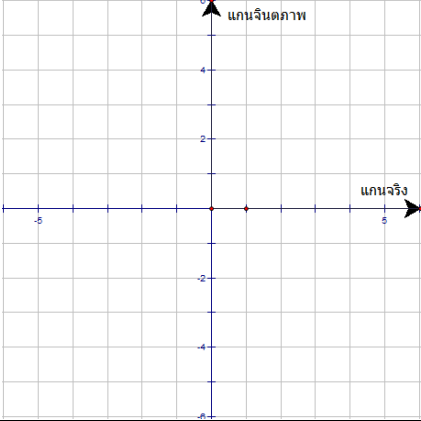
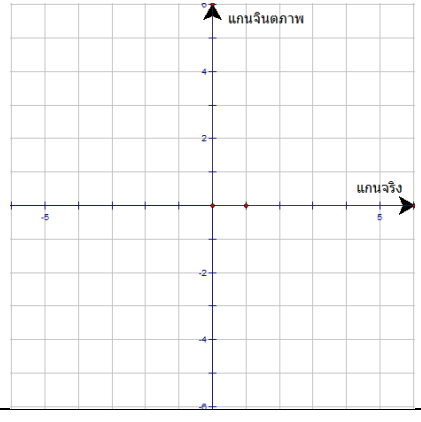
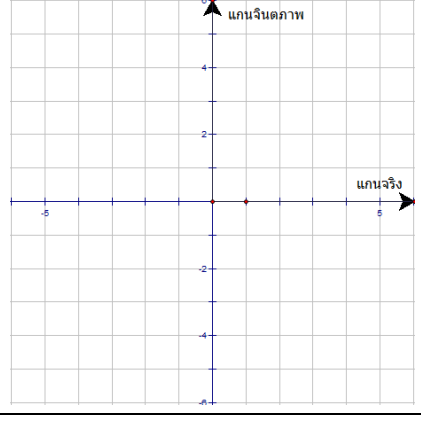
11. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 3 เรื่อง สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz (ขั้นฝึกทักษะ)

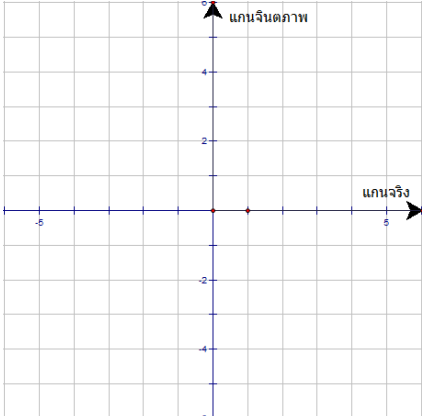
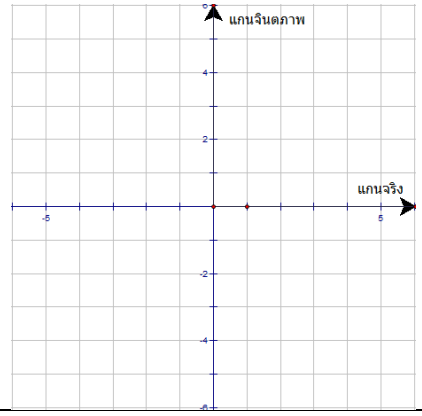
สื่อการเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz
2. ใบกิจกรรมที่ 3.1 – 3.2 เรื่อง สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
3. แบบฝึกทักษะที่ 3 เรื่อง สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

การวัดและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 3.1 – 3.2
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 3
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรมที่ 3.1		หน้าที่ 1/2
เรื่อง สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน		
จุดประสงค์ สามารถหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้		
คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อน และใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้		
ข้อ	กราฟแบบเวกเตอร์	ค่าสัมบูรณ์
1	$A = 3 + 4i$, $B = -3 + 4i$, $C = -3 - 4i$, $D = 3 - 4i$ 	$ A = 3 + 4i = \dots\dots\dots$ $ B = -3 + 4i = \dots\dots\dots$ $ C = -3 - 4i = \dots\dots\dots$ $ D = 3 - 4i = \dots\dots\dots$
2	$A = 3 + 3i$, $B = -3 + 3i$, $C = -3 - 3i$, $D = 3 - 3i$ 	$ A = 3 + 3i = \dots\dots\dots$ $ B = -3 + 3i = \dots\dots\dots$ $ C = -3 - 3i = \dots\dots\dots$ $ D = 3 - 3i = \dots\dots\dots$
3	$A = 2 + 5i$, $B = -2 + 5i$, $C = -2 - 5i$, $D = 2 - 5i$ 	$ A = 2 + 5i = \dots\dots\dots$ $ B = -2 + 5i = \dots\dots\dots$ $ C = -2 - 5i = \dots\dots\dots$ $ D = 2 - 5i = \dots\dots\dots$

ใบกิจกรรมที่ 3.1		หน้าที่ 2/2
เรื่อง สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน		
จุดประสงค์ สามารถหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้		
คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อน และใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้		
ข้อ	กราฟแบบเวกเตอร์	ค่าสัมบูรณ์
4	$A = 3 + 4i, B = -3 + 4i,$ $C = -3 - 4i, D = 3 - 4i$ 	$ A = 3 + 4i = \dots\dots\dots$ $ B = -3 + 4i = \dots\dots\dots$ $ C = -3 - 4i = \dots\dots\dots$ $ D = 3 - 4i = \dots\dots\dots$
5	$A = 3 + 3i, B = -3 + 3i,$ $C = -3 - 3i, D = 3 - 3i$ 	$ A = 3 + 3i = \dots\dots\dots$ $ B = -3 + 3i = \dots\dots\dots$ $ C = -3 - 3i = \dots\dots\dots$ $ D = 3 - 3i = \dots\dots\dots$
สรุป	<p>กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ A,B,C และ D เป็นจำนวนเชิงซ้อน</p> $A = a + bi,$ $B = -a + bi,$ $C = -a - bi,$ $D = a - bi$	<p>กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ A,B,C และ D เป็นจำนวนเชิงซ้อน</p> $ A = a + bi = \dots\dots\dots$ $ B = -a + bi = \dots\dots\dots$ $ C = -a - bi = \dots\dots\dots$ $ D = a - bi = \dots\dots\dots$
	ดังนั้น $ A \dots B \dots C \dots D = \dots\dots\dots$	

หมายเหตุ นักเรียนอาจใช้ความรู้เรื่องเหล่านี้มาช่วยสรุปหาสูตรของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน คือ

1. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง
2. ระยะระหว่างจุดสองจุด
3. ค่าสัมบูรณ์ของเวกเตอร์

ใบกิจกรรมที่ 3.2			หน้าที่ 1/3
เรื่อง สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน			
จุดประสงค์ สามารถบอกสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้			
คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้			
ข้อ	กำหนดจำนวนเชิงซ้อน	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$A = 3 - 4i$	$ A ^2 =$	$A\bar{A} =$
2	$B = -4 - 6i$	$ B ^2 =$	$B\bar{B} =$
3	$C = 10$	$ C ^2 =$	$C\bar{C} =$
4	$D = 1.3$	$ D ^2 =$	$D\bar{D} =$
5	$E = -3.6i$	$ E ^2 =$	$E\bar{E} =$
6	$F = 23i$	$ F ^2 =$	$F\bar{F} =$
<p>จาก ข้อ 1 – 6 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า Z เป็นจำนวนเชิงซ้อน</p> <p>จะได้ $Z ^2 =$</p>			
ใช้ค่าของจำนวนเชิงซ้อน A, B, C, D และ E จากข้อ 1 – 6 หาค่าจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้			
ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2	กรณีที่ 3
7	$ A =$	$ -A =$	$ \bar{A} =$
8	$ B =$	$ -B =$	$ \bar{B} =$
9	$ C =$	$ -C =$	$ \bar{C} =$
10	$ D =$	$ -D =$	$ \bar{D} =$
11	$ E =$	$ -E =$	$ \bar{E} =$
12	$ F =$	$ -F =$	$ \bar{F} =$
<p>จาก ข้อ 7 – 12 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า Z เป็นจำนวนเชิงซ้อน</p> <p>จะได้ $Z =$ =</p>			

ใบกิจกรรมที่ 3.2			หน้าที่ 2/3
เรื่อง สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน			
จุดประสงค์ สามารถบอกสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้			
คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้			
ข้อ	กำหนดจำนวนเชิงซ้อน	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
13	$A = 3 - 4i$	$\left \frac{1}{A}\right =$	$\frac{1}{ A } =$
14	$B = -4 - 6i$	$\left \frac{1}{B}\right =$	$\frac{1}{ B } =$
15	$C = 10$	$\left \frac{1}{C}\right =$	$\frac{1}{ C } =$
16	$D = 1.3$	$\left \frac{1}{D}\right =$	$\frac{1}{ D } =$
17	$E = -3.6i$	$\left \frac{1}{E}\right =$	$\frac{1}{ E } =$
18	$F = 23i$	$\left \frac{1}{F}\right =$	$\frac{1}{ F } =$
<p>จาก ข้อ 13 – 18 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า Z_1, Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน</p> <p>จะได้ $\left \frac{1}{Z}\right = \dots\dots\dots$ เมื่อ $Z \neq 0$</p>			
ข้อ	กำหนดจำนวนเชิงซ้อน	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
19	$A = 3 - 4i$	$ AB =$	$ A B =$
20	$B = -4 - 6i$	$ AC =$	$ A C =$
21	$C = 10$	$ AD =$	$ A D =$
22	$D = 1.3$	$ AE =$	$ A E =$
23	$E = -3.6i$	$ AF =$	$ A F =$
24	$F = 23i$	$ BF =$	$ B F =$
<p>จาก ข้อ 19 – 24 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า Z_1, Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน</p> <p>จะได้ $Z_1 Z_2 = \dots\dots\dots$</p>			

ใบกิจกรรมที่ 3.2			หน้าที่ 3/3
เรื่อง สมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน			
จุดประสงค์ สามารถบอกสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้			
คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้			
ข้อ	กำหนดจำนวนเชิงซ้อน	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
25	$A = 3 - 4i$	$ A + B =$	$ A + B =$
26	$B = -4 - 6i$	$ A + F =$	$ A + F =$
27	$C = 10$	$ C + E =$	$ C + E =$
28	$D = 1.3$	$ D + F =$	$ D + F =$
29	$E = -3.6i$	$ C + D =$	$ C + D =$
30	$F = 23i$	$ E + F =$	$ E + F =$
<p>จาก ข้อ 25 – 30 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า Z_1, Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน</p> <p>จะได้ $Z_1 + Z_2$ $Z_1 + Z_2$ (ให้เลือกใช้เครื่องหมาย =, >, <, ≥ หรือ ≤)</p>			
ข้อ	กำหนดจำนวนเชิงซ้อน	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
31	$A = 3 - 4i$	$ A - B =$	$ A - B =$
32	$B = -4 - 6i$	$ A - F =$	$ A - F =$
33	$C = 10$	$ C - E =$	$ C - E =$
34	$D = 1.3$	$ D - F =$	$ D - F =$
35	$E = -3.6i$	$ C - D =$	$ C - D =$
36	$F = 23i$	$ E - F =$	$ E - F =$
<p>จาก ข้อ 31 – 36 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า Z_1, Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน</p> <p>จะได้ $Z_1 - Z_2$ $Z_1 - Z_2$ (ให้เลือกใช้เครื่องหมาย =, >, <, ≥ หรือ ≤)</p>			
<p>นักเรียนคิดว่า $\left \frac{Z_1}{Z_2} \right = \frac{ Z_1 }{ Z_2 }$ หรือไม่ เพราะเหตุใด</p> <p>.....</p> <p>.....</p>			

แบบฝึกทักษะที่ 3

เรื่องสมบัติค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง กำหนด Z , Z_1 และ Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ให้นักเรียนเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง โดยไม่ใช่เครื่องหมาย
คำนวณวิทยาศาสตร์

1. $|-1 + 3i| =$

2. $|3 - 2i| =$

3. $|5 + 5i| =$

4. $|-(5 + 5i)| =$

5. $\left| \frac{1}{5+5i} \right| =$

6. $\left| \frac{-1+3i}{5+5i} \right| =$

7. $|(-1 + 3i)(3 - 2i)| =$

8. $\left| \frac{(-1+3i)(3-2i)}{5+5i} \right| =$

9. $Z\bar{Z} =$

10. $|-Z| =$

11. $|\bar{Z}| =$

12. $\left| \frac{1}{Z} \right| =$ เมื่อ $Z \neq 0$

13. $|Z_1 Z_2| =$

14. $|Z_1 + Z_2| \leq$

15. $|Z_1 - Z_2| \geq$